

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 23.01.2010
Cls. a IX-a ,
BAREM DE CORECTARE

PROBLEMA I.

Fie $a, b, c \in (0, \infty)$ și $a + b + c = 2010$.

Să se arate că $\sqrt{ab+ac} + \sqrt{ab+bc} + \sqrt{ac+bc} \leq 3015$.

Rezolvare (se acordă 1 p din oficiu)

Folosim inegalitatea mediilor, $\sqrt{ab+ac} \stackrel{(1p)}{=} \sqrt{a(b+c)} \stackrel{(2p)}{\leq} \frac{a+b+c}{2} = 1005$,

$$\sqrt{ab+bc} \leq \frac{a+b+c}{2} = 1005, (1p)$$

$$\sqrt{ac+bc} \leq \frac{a+b+c}{2} = 1005, (1p)$$

Însumând cele trei relații obținem $\sqrt{ab+ac} + \sqrt{ab+bc} + \sqrt{ac+bc} \leq 3015, (1p)$

PROBLEMA II.

Arătați că orice număr natural $n \geq 2$ poate fi scris sub forma $n = 2k_1 + 3k_2$, unde $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$.

Rezolvare (se acordă 1 p din oficiu)

Demonstrăm prin inducție;

$$P(2): 2 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0, (k_1 = 1, k_2 = 0) (1p)$$

$$P(k): k = 2 \cdot k_1 + 3 \cdot k_2, (1p)$$

$$P(k+1): k+1 = 2 \cdot l_1 + 3 \cdot l_2, (1p)$$

$$\text{Din } P(k) \quad k+1 = 2 \cdot k_1 + 3 \cdot k_2 + 1 = 2 \cdot k_1 + 3 \cdot k_2 + \overbrace{3-2}^{(2p)} = 2 \cdot (k_1 - 1) + 3 \cdot (k_2 + 1) = 2 \cdot l_1 + 3 \cdot l_2 (1p)$$

PROBLEMA III.

În triunghiul ABC considerăm punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{5}$ și $\frac{AN}{NC} = \frac{3}{4}$, fie $P \in (MN)$ astfel încât $\frac{MP}{PN} = \frac{2}{7}$.

Dacă $AP \cap BC = \{Q\}$, să se determine valoarea raportului $\frac{BQ}{QC}$.

Rezolvare (se acordă 1 p din oficiu)

$$\frac{AM}{MB} = \frac{1}{5} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{6} \overrightarrow{AB}, \quad \frac{AN}{NC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{3}{7} \overrightarrow{AC} \quad (1p)$$

$$\frac{MP}{PN} = \frac{2}{7} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{7}{9} \overrightarrow{AM} + \frac{2}{9} \overrightarrow{AN}.$$

$$\text{Deci } \overrightarrow{AP} = \frac{7}{54} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{21} \overrightarrow{AC}, (1p)$$

$$\text{Fie } \frac{BQ}{QC} = k, \text{ atunci } \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{k+1} \overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1} \overrightarrow{AC}, (1p)$$

Punctele A, P și Q sunt colineare, deci $\exists \alpha \in \mathbf{R}^*$, astfel încât $\overrightarrow{AQ} = \alpha \overrightarrow{AP}$,

$$\frac{1}{k+1} \overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1} \overrightarrow{AC} = \alpha \left(\frac{7}{54} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{21} \overrightarrow{AC} \right), \quad \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ sunt necoliniari } (1p)$$

$$\text{Deci } \begin{cases} \frac{1}{k+1} = \frac{7\alpha}{54} \\ \frac{k}{k+1} = \frac{2\alpha}{21} \end{cases} (1p) \Rightarrow \frac{7\alpha k}{54} = \frac{2\alpha}{21} \Rightarrow \frac{7k}{18} = \frac{2}{7} \Rightarrow k = \frac{36}{49} \quad (1p)$$

PROBLEMA IV.

Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se consideră punctele D și respectiv E , astfel încât $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC} = \vec{0}$. Fie T intersecția dreptelor DC și BE .

Să se determine $\alpha \in \mathbf{R}$ cu proprietatea că $\overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \alpha \overrightarrow{TA}$.

Gazeta Matematică, Dan Nedeianu

Rezolvare (se acordă 1 p din oficiu)

$$\text{Fie } k, p \in \mathbf{R} \setminus \{1\} : \overrightarrow{DA} = k \cdot \overrightarrow{DB} \text{ și } \overrightarrow{EA} = p \cdot \overrightarrow{EC}, (1p)$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} (k+1)\overrightarrow{DB} + (p+1)\overrightarrow{EC} = \vec{0} \\ \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{EC} \text{ necoliniari} \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1p) \\ (1p) \end{array} \Rightarrow k = p = -1 \Rightarrow D, E \text{ mijloacele laturilor } AB \text{ respectiv } AC.$$

Deci T este centrul de greutate $(1p)$

$$\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} \stackrel{(1p)}{=} \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} = -\overrightarrow{TC} \Rightarrow \alpha = -1, (1p)$$